

Modeling and Analysis of Fractional Order Equivalent Circuit of Capacitors*

ZHANG Yunning^{1,2*}, QIN Jianrui¹

(1. College of Electrical and New Energy, China Three Gorges University, Yichang Hubei 443002, China;

2. Hubei Provincial Engineering Research Center of Intelligent Energy Technology, China Three Gorges University, Yichang Hubei 443002, China)

Abstract: The actual capacitors are not ideal and their characteristics are affected by various factors. It is necessary to establish accurate capacitor model for circuit system analysis and design. Considering the fractional order calculus characteristics of capacitors, this paper proposes the fractional order equivalent circuit model based on the traditional integer order equivalent circuit model of capacitors. The differential evolution algorithm is used to identify the model parameters. Then the model is applied to Buck circuit to analyze the ripple voltage. The simulation results show that, compared with the traditional integer order equivalent circuit model, the fractional order equivalent circuit model is more accurate in fitting the actual capacitance data. This verifies the feasibility and effectiveness of the capacitor fractional order equivalent circuit model.

Key words: capacitor model; fractional calculus; parameter identification

EEACC: 1190; 2130

doi: 10.3969/j.issn.1005-9490.2021.01.004

电容的分数阶等效电路建模与分析*

张贇宁^{1,2*}, 秦健瑞¹

(1. 三峡大学电气与新能源学院, 湖北 宜昌 443002; 2. 智慧能源技术湖北省工程研究中心(三峡大学), 湖北 宜昌 443002)

摘要: 实际的电容器件都是非理想的, 其特性受到各种因素的影响, 建立精确的电容模型对于电路系统分析与设计十分重要。考虑到电容的分数阶微积分特性, 文中基于传统的电容整数阶等效电路模型, 提出电容的分数阶等效电路模型, 并采用差分进化算法辨识出模型参数, 然后将该模型应用于 Buck 电路进行纹波电压的分析。仿真结果表明, 同传统整数阶等效电路模型相比, 分数阶等效电路模型拟合电容实际数据的准确度更高, 验证了该电容分数阶等效电路模型的有效性。

关键词: 电容模型; 分数阶微积分; 参数辨识

中图分类号: TM133

文献标识码: A

文章编号: 1005-9490(2021)01-0019-05

当前, 随着科学技术的不断发展和环境问题的日益突出, 新能源技术得到越来越多人的关注, 而在新能源的开发与应用中^[1], 电力电子技术及其相关电子器件在其中充当重要角色。电容作为一种重要电力电子器件, 出现在许多电力电子电路系统设计中。目前受材料及制造工艺的影响, 几乎大部分的电容元件都是非理想的, 存在各种寄生参数, 例如电容的等效串联电阻 (Equivalent Series Resistance, ESR) 就是一种常见的寄生参数。电容的特性受温度、工作频率等外部因素的影响, 在精确的电路系统设计中, 会对误差分析和稳定性分析带来较大误差, 因此需要建立更加精确的等效电容模型。

基于上述情况, 为更加准确地描述电容的特性, 多种电容模型被相继提出。目前, 电容的模型主要可以分为三大类: 等效电路模型、电化学模型和分子

模型。实际工程应用中, 通常采用的电容模型有经典的 RC 串联等效模型^[2]; Spyker R L 等人^[3]考虑电容器的漏电效应, 在经典 RC 串联模型上并联一个等效电阻, 得到电容的简单串并联模型; 考虑电容器的阻抗特性及电容复杂的电化学结构, 提出了电容器的赝电容电化学等效电路模型^[4]; 考虑电容的等效串联电阻和等效串联电感, 同时注意到高频工作环境下电容的自谐振问题, RLC 串联等效模型被提出^[5], 该模型结构简单, 描述了电容的基本结构, 但不能在各个频率段都准确反映电容的实际特性; 电容厂商 Nichicon^[6]考虑电容漏电流的影响, 提出改进型的 RLC 串联等效模型, 该模型在一些实际控制器电路设计中被采用; 此外还有研究者认为更复杂的、含有大量电容和电阻的等效电容模型更能准确地反映电容的特性^[7-8]。可以看到的是, 为了精

项目来源: 国家自然科学基金项目 (61973193)

收稿日期: 2020-06-06 修改日期: 2020-09-06

确地反映电容的实际电气特性,电容的等效电路模型会越来越复杂,会有更多新的电路元件和支路添加到模型中。然而,过于复杂的模型不利于系统建模,模型参数数目过多也不便于辨识,不便应用于实际电路设计时进行可靠性、寿命评估等具体分析中。因此,有必要探索新的等效电容模型的建模方法。

近年来,分数阶微积分被广泛应用在信号处理、生物学、电化学、系统识别、人工智能和控制系统等领域当中^[9-11]。目前已有研究成果表明,实际电路中的电容等电抗元件具有分数阶微积分特性并提出了电容的分数阶模型^[12-15]。文献[16]利用 R、C 及运放构建出分数阶电感模型。文献[17]应用分数阶阻抗的有理逼近原理,构造出可以实现任意阶次的分数阶分抗电路。运用分数阶建立的模型更加符合电容的实际特性,模型精确度更高,更能准确地反映电路中电流与电压之间的关系。

基于以上分析,本文在电容的简单串并联模型的基础上,考虑电容的分数阶微积分特性,借助分数阶微积分理论建立电容的分数阶等效电路模型;采用差分进化算法辨识出模型中各个参数的数值并将该电容模型应用于 Buck 电路中进行分析,通过计算与仿真验证了本文提出的电容分数阶模型的正确性和有效性。

1 电容的等效电路模型

为提高电容模型的精确度,使其能更加准确反映实际工作中电容的电气特性, Spyker R L 等人提出了图 1 所示的电容简单串并联模型,其中, C 为电容的标称值; R_p 模拟了电容的漏电流效应,对电容的长期工作性能具有重要意义; R_m 代表电容的等效串联电阻,代表电容器内部加热时的损耗,对电容的充放电过程中尤为重要。

目前,分数阶微积分理论被广泛应用到工程领域当中,对一些复杂的、非线性的系统建模有较大裨益。考虑电容的分数阶特性,本文在图 1 所示模型的基础上,构建图 2(a) 的分数阶等效电路模型,其中 C 为电容的标称值,用阶次 α 来表示电容的分数阶特性。其中, C^α 的阻抗可表示为:

$$Z = \frac{1}{(j\omega)^\alpha C} = \frac{1}{\omega^\alpha C} \left(\cos \frac{\alpha\pi}{2} - j \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) \quad (1)$$

式中: $\omega = 2\pi f$ 为角频率。由式(1)可以看到分数阶

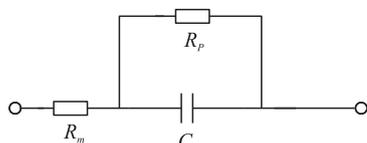
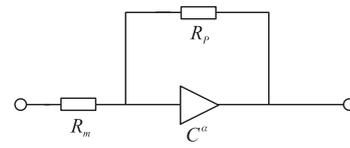
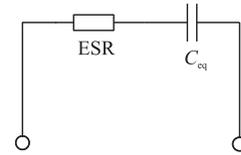


图 1 电容的简单串并联模型

电容 C^α 有别于传统的整数阶电容,其阻抗表达式中同时含有实部与虚部。



(a) 分数阶等效电路模型



(b) 等效串联形式

图 2 电容的分数阶模型

由图 2(a) 可得该模型的阻抗表达式为:

$$Z(\omega) = R_p // \frac{1}{(j\omega)^\alpha C} + R_m = \frac{R_p \left(1 + \omega^\alpha R_p C \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right) - j\omega^\alpha R_p^2 C \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{1 + \omega^{2\alpha} R_p^2 C^2 + 2\omega^\alpha R_p C \cos \frac{\alpha\pi}{2}} + R_m \quad (2)$$

此时,电容的等效串联电阻 ESR:

$$ESR = \frac{R_p \left(1 + \omega^\alpha R_p C \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right)}{1 + \omega^{2\alpha} R_p^2 C^2 + 2\omega^\alpha R_p C \cos \frac{\alpha\pi}{2}} + R_m \quad (3)$$

等效电容 C_{eq} 为:

$$C_{eq} = \frac{1 + \omega^{2\alpha} R_p^2 C^2 + 2\omega^\alpha R_p C \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{\omega^{\alpha+1} R_p^2 C \sin \frac{\alpha\pi}{2}} \quad (4)$$

因此,如图 2(b) 所示,可以将实际的电容分数阶等效电路模型表示为等效电容与等效串联电阻串联的形式。同时,由式(2)~式(4)可知,电容分数阶等效电路模型中待辨识的参数向量为 $V = [\alpha, R_p, R_m]$ 。

2 等效电路模型的参数辨识

参数辨识的方法有很多,常见的有最小二乘法、梯度校正法和极大似然法等。通过分析前述模型可知,该模型为非线性系统,且包含分数阶次 α ,故很难采用传统的最小二乘法原理辨识出参数。因此,本文采用差分进化算法来进行模型参数的辨识。

使用分数阶等效电容模型的阻抗表达式去拟合实际电容的阻抗曲线得到等效模型的各个参数。电容实测阻抗曲线可由精密阻抗分析仪测量得到。对得到的数据进行预处理,截取频率 f_s 在 100 Hz ~ 1 MHz 范围内的数据。

在进行参数辨识时,同时考虑 ESR 和 C_{eq} , 构造函数 Z_Y :

$$Z_Y = \sqrt{(\mu_1 ESR)^2 + (\mu_2 C_{eq})^2} \quad (5)$$

式中: μ_1 、 μ_2 为权重系数,且取值范围均在 0~1 之间。

根据使函数 Z_Y 同实测数据的均方差有全局极小值的原理,构造参数识别方法的目标函数:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n [Z(\omega_k) - Z_Y(\omega_k)]^2}{n} \quad (6)$$

结合模型中参数的个数,选取种群规模大小为参数个数的 20 倍,权重系数 μ_1 为 0.7, μ_2 为 0.3,缩放因子取 0.75,交叉概率取 0.7。

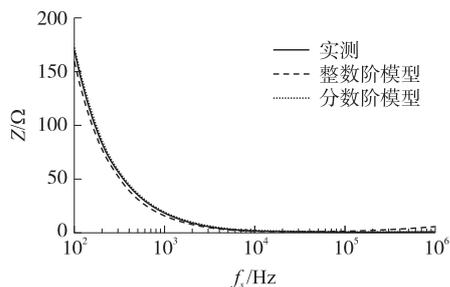
选取标称值为 10 μ F 的铝电解电容,在频率范围 100 Hz~1 MHz 以内,使电容分数阶等效电路模型和电容整数阶简单串并联模型分别同电容实测数据进行拟合,得到模型的各项参数数据如表 1 表示。

表 1 参数辨识结果

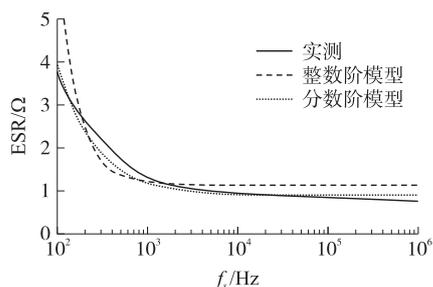
参数	分数阶模型	整数阶模型
R_m	0.98 Ω	1.252 6 Ω
R_p	1.2 M Ω	4 265 Ω
α	0.987 7	—

两种模型分别与实测数据进行拟合的结果如图 3 所示。

图 3(a)表示等效阻抗变化曲线,其中点划线为分数阶模型的拟合情况,虚线为整数阶模型的拟合情况,实线为实测数据。由图中所示,从整体来看,两种模型均能较好的表示出电容实际阻抗随工作频率的



(a) 电容的阻抗变化曲线



(b) 电容的 ESR 曲线

图 3 拟合曲线对比情况

变化,在 100 Hz~1 000 Hz 频段内,分数阶模型与电容实际阻抗曲线比较符合,而整数阶模型与电容实际阻抗曲线稍有偏差。此外,两种电容等效模型的阻抗值同实测值的相对误差 (Relative Error) 如图 4 所示。

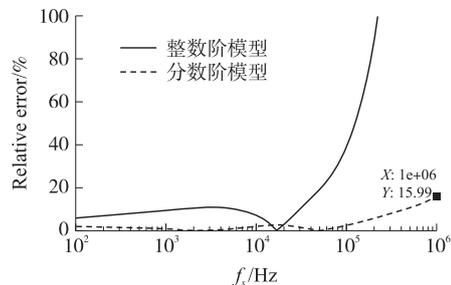


图 4 阻抗曲线的相对误差

由图 4 可以看到,电容的分数阶等效模型在整个频率段内的相对误差均低于 16%;而电容的整数阶模型在 100 Hz~10 kHz 范围内,相对误差低于 20%,但超出 10 kHz 后其相对误差较大。由此,说明本文所提出的电容的分数阶等效模型能够较好地反映电容的等效阻抗值随频率的变化情况。

图 3(b)表示等效串联电阻 ESR 的拟合曲线。可以看到,在 100 Hz~1 MHz 整个频率段内,整数阶模型的等效串联电阻与电容实际的等效串联电阻曲线有明显偏差,拟合效果差强人意。分数阶模型在 100 Hz~100 kHz 频段内,与电容实际等效串联电阻曲线稍有偏差,在 100 kHz~1 MHz 频段内拟合准确度较好,只在 1 MHz 处略有偏差。

两种电容等效模型的 ESR 曲线与实测曲线的相对误差情况如图 5 所示,电容的分数阶模型在整个频率段 100 Hz~1 MHz 范围内,其相对误差不超过 20%,而整数阶模型在低频段和高频段的相对误差均较大。

由前述分析可以看到,同电容的整数阶等效电路模型相比,分数阶模型仅仅是多了一个参数 α ,在进行数据拟合时却表现出了更高的拟合精确度,且更能体现电容的实际工作特性。

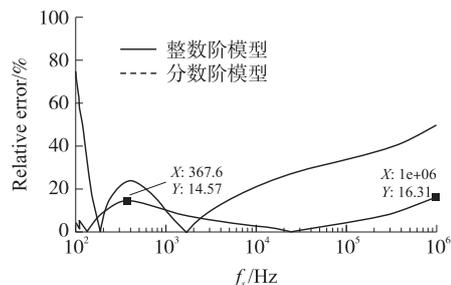


图 5 电容 ESR 曲线的相对误差

3 实例分析

如图 6(a)所示,以 Buck 电路为例,采用前述电

容的分数阶等效电路模型,分析电容的等效串联电阻对输出纹波电压的影响。将图6(a)中分数阶电容模型等效为ESR和等效电容 C_{eq} 的串联形式,得到图6(b)所示的等效电路。

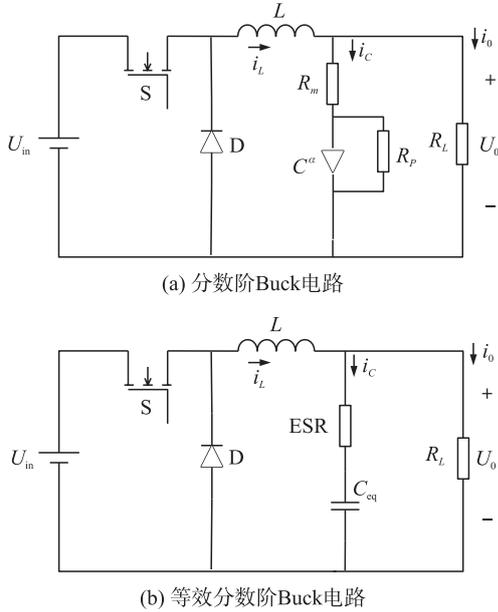


图6 分数阶 Buck 电路及其等效电路

当 Buck 电路工作在电感电流连续模式 (CCM) 时,其对应的工作波形时序图如图7所示。在一个开关周期 $T_s(t_0 \sim t_2)$ 内,电路系统有两种工作模式,模式1即 $t_0 \sim t_1$ 时间段,为开关管 S 导通, D 关断;模式2即 $t_1 \sim t_2$ 时间段,为开关管 S 关断, D 导通。

在工作模式切换瞬间,电容电流 i_c 发生突变,产生 Δi_c ,由图6(b),考虑电容的 ESR, Δi_c 作用于 ESR 和 C_{eq} 上产生纹波电压。

根据文献[19]计算 Buck 电路输出纹波电压的方法,得到图6(b)的输出纹波电压 U_p 为:

$$U_p = e^{\alpha(t_{22}-t_1)} [k_3 \cos \beta(t_{22}-t_1) + k_4 \sin \beta(t_{22}-t_1)] - e^{\alpha t_{11}} (k_1 \cos \beta t_{11} + k_2 \sin \beta t_{11}) - U_{in} \quad (7)$$

式中:

$$\alpha = -\frac{L + C_{eq} R_L ESR}{2LC_{eq}(R_L + ESR)}, k_1 = U_{o1}(t_0) - U_{in}$$

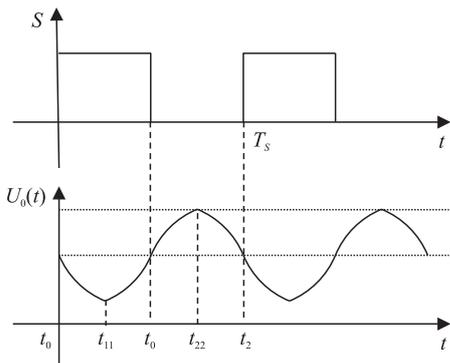


图7 时序脉冲及输出电压波形图

$$\beta = \sqrt{\frac{R_L}{LC_{eq}(R_L + ESR)} - \left(\frac{L + C_{eq} R_L ESR}{2LC_{eq}(R_L + ESR)}\right)^2}$$

$$k_2 = \frac{R_L i_{L1}(t_0)}{\beta C_{eq}(R_L + ESR)} - \frac{U_{o1}(t_0)}{\beta C_{eq}} \left(\frac{L + C_{eq} R_L ESR}{L(R_L + ESR)} + \alpha C_{eq}\right) + \frac{1}{\beta C_{eq}} \left(\frac{C_{eq} R_L ESR}{L(R_L + ESR)} + \alpha C_{eq}\right) U_{in}$$

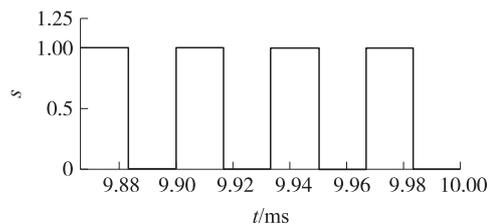
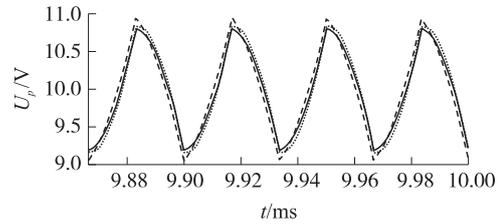
$$k_3 = e^{\alpha t_1} (k_1 \cos \beta t_1 + k_2 \sin \beta t_1) + U_{in}$$

$$k_4 = \frac{U_{o1}(t_0) e^{\alpha(t_1-t_2)} - k_3 \cos \beta(t_2-t_1)}{\sin \beta(t_2-t_1)}$$

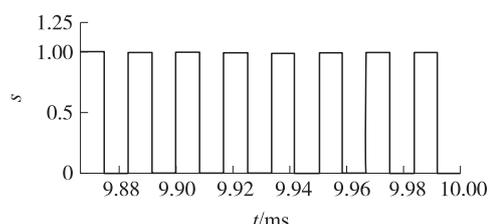
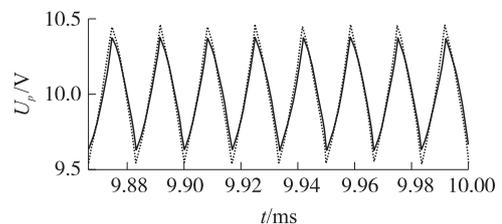
$$t_{11} = -\frac{1}{\beta} \arctan \frac{\alpha k_1 + \beta k_2}{\alpha k_2 - \beta k_1}$$

$$t_{22} - t_1 = -\frac{1}{\beta} \arctan \frac{\alpha k_3 + \beta k_4}{\alpha k_4 - \beta k_3}$$

选取两组开关频率 $f_s = 30 \text{ kHz}$ 和 $f_s = 60 \text{ kHz}$ 进行 Buck 电路的仿真分析。其中,电路的各项参数设置为: $U_{in} = 20 \text{ V}$, $L = 100 \mu\text{H}$, $R_L = 10 \Omega$, $C = 10 \mu\text{F}$, 开关管 S 驱动信号占空比为 0.5。在此参数条件下, Buck 电路工作在 CCM 模式。图8表示在两组不同开关频率下,纹波电压 U_p 的波形。其中,实线为由



(a) $f_s = 30 \text{ kHz}$



(b) $f_s = 60 \text{ kHz}$

图8 不同工作频率下纹波电压仿真波形

公式(7)得到的仿真结果,点划线为分数阶仿真曲线,虚线为整数阶模型仿真结果。

由图 8 可以看到,本文所提的电容分数阶模型在 Buck 电路中能够较好地拟合理论计算状态变量的变化情况。而整数阶模型的状态变量的变化情况与理论计算状态变量的变化情况存在较大误差。

根据仿真波形的数值及式(7),计算得到输出纹波电压值同仿真结果的对比如表 2 所示。

表 2 不同方案得到的输出纹波电压对比

f_s/kHz	整数阶模型 仿真 U_p/V	分数阶模型 计算 U_p/V	仿真实测 U_p/V
30	1.897	1.092	1.035
60	0.735	1.284	1.04

由表 2 可知,分数阶模型计算的输出纹波电压值与实测示波器仿真结果更加接近,而整数阶模型计算的输出纹波电压与实测示波器仿真结果有较大误差。因此,本文提出的分数阶电容等效模型能够较准确地预测 Buck 电路的输出纹波电压值,该等效模型的可行性和有效性得到进一步验证。

4 结束语

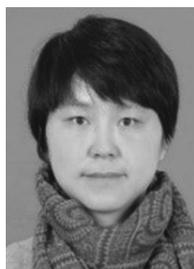
本文针对整数阶等效电容模型预测电容实际特性的不准确性和复杂性,建立了电容的分数阶等效电路模型,并采用差分进化算法对其进行参数辨识,得到电容分数阶模型和整数阶模型同电容实测数据的拟合曲线,并将分数阶等效电路模型应用于 Buck 电路进行纹波电压的计算。仿真及计算结果表明,分数阶等效模型能较准确反映电容的实际特性,对控制器等电子电路系统的精确设计具有重要意义。

参考文献:

- [1] 韩连山,霍超. 基于电力电子技术电气制动在大电网中的应用[J]. 电力电子技术,2019(6):65-67.
- [2] Cheng K Y, Yu F, Mattavelli P, et al. Digital Enhanced V2-Type Constant on-Time Control Using Inductor Current Ramp Estimator for a Buck Converter with Small ESR Capacitors[C]//Energy Conversion Congress & Exposition. Atlanta GA. IEEE,2010:508-513.
- [3] Spyker R L, Nelms R M. Classical Equivalent Circuit Parameters

for a Double-Layer Capacitor[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,2000,36(3):829-836.

- [4] Simpraga R P, Conway B E. The Real-Area Scaling Factor in Electrocatalysis and in Charge Storage by Supercapacitors[J]. 1998,43(19-20):3045-3058.
- [5] Braham A, Lahyani A, Venet P, et al. Recent Developments in Fault Detection and Power Loss Estimation of Electrolytic Capacitors[J]. IEEE Trans Power Electron,2010,25(1):33-43.
- [6] Nichicon. General Description of Aluminum Electrolytic Capacitors. <https://www.nmr.mgh.harvard.edu/~reese/electrolytics/tec1.pdf>.
- [7] Parler S G. Improved Spice Models of Aluminum Electrolytic Capacitors for Inverter Applications [J]. IEEE Transactions on Industry Applications,2003,39(4):929-935.
- [8] Smith L D, Hockanson D. Distributed SPICE Circuit Model for Ceramic Capacitors [C]//Electronic Components and Technology Conference. Orlando FL USA IEEE,2001:523-528.
- [9] 余波,梁锐,蒲亦非,等. 超级电容器恒流充电的时域分数阶电路模型[J]. 电工技术学报,2019,34(17):3533-3541.
- [10] 雷腾飞,付海燕,张鑫,等. 基于 Adomian 分解法的分数阶混沌系统的动力学分析与电路实现[J]. 电子器件,2019,42(1):193-200.
- [11] Tripathy M C, Mondal D, Biswas K, et al. Design and Performance Study of Phase-Locked Loop Using Fractional-Order Loop Filter [J]. International Journal of Circuit Theory & Applications,2015,43(6):776-792.
- [12] 柴秀慧,曹晗,张波,等. Boost 变换器全分数阶化系统分析与控制性能研究[J]. 电源学报,2019,17(6):27-33.
- [13] Chen Y, Malek H, Dadras S. Fractional Order Equivalent Series Resistance Modelling of Electrolytic Capacitor and Fractional Order Failure Prediction with Application to Predictive Maintenance[J]. IET Power Electronics,2016,9(8):1608-1613.
- [14] 马冬冬,王志强,王进君. 单相逆变器分数阶建模及分析[J]. 电测与仪表,2017,54(6):106-112.
- [15] 王东东,张波,丘东元,等. 分数阶电路的相量分析法及正弦稳态特性研究[J]. 电源学报,2017,15(4):34-40.
- [16] Khanra M, Pal J, Biswas K. Rational Approximation and Analog Realization of Fractional Order Transfer Function with Multiple Fractional Powered Terms[J]. Asian Journal of Control,2013,15(3):723-735.
- [17] 何秋燕,袁晓. Carlson 迭代与任意阶分数微积分算子的有理逼近[J]. 物理学报,2016,65(16):29-38.
- [18] 许美玲,王依雯. 基于改进差分进化和回声状态网络的时间序列预测研究[J]. 自动化学报:1-10[2020-04-22]. <https://doi.org/10.16383/j.aas.c180549>.
- [19] 皇金锋,李林鸿,李良井. 考虑电容 ESR 的 Buck 变换器输出纹波电压精确建模[J]. 电测与仪表,2019,56(15):29-33.



张贇宁(1979—),女,博士,副教授,从事电工设备健康状态评估,网络控制理论,微电网运行与控制等方面的研究;



秦健瑞(1994—),男,硕士研究生,从事电工设备健康状态评估方面的研究。